○ Bài 01

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực, nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ hay $u_n \to 0$ khi $n \to +\infty$.

Định nghĩa 2

Ta nói dãy số (v_n) có giới hạn là a (hay v_n dần tới a) khi $n \to +\infty$, nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - a) = 0$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = a$ hay $v_n \to a$ khi $n \to +\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0$ với k nguyên dương;

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ nếu $|q| < 1$;

c) Nếu $u_n = c$ (c là hằng số) thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c = c$.

Chú ý: Từ nay về sau thay cho $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ ta viết tắt là $\lim u_n = a$.

II – ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN

Định lí 1

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì

- $\lim(u_n + v_n) = a + b$
- $\lim(u_n - v_n) = a - b$
- $\lim(u_n . v_n) = a.b$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$ (nếu $b \neq 0$).

b) Nếu $\begin{cases} \lim u_n = a \\ u_n \geq 0, \forall n \end{cases}$ thì $\begin{cases} \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a} \\ a \geq 0 \end{cases}$.

III – TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q, với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn:

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q} \quad (|q| < 1).$$

IV – GIỚI HẠN VÔ CỰC

1. Định nghĩa

- Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn là $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi.

  Kí hiệu: $\lim u_n = +\infty$ hay $u_n \to +\infty$ khi $n \to +\infty$.

- Dãy số (u_n) có giới hạn là $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$.

  Kí hiệu: $\lim u_n = -\infty$ hay $u_n \to -\infty$ khi $n \to +\infty$.

Nhận xét: $u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim(-u_n) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

Ta thừa nhận các kết quả sau

a) $\lim n^k = +\infty$ với k nguyên dương;

b) $\lim q^n = +\infty$ nếu $q > 1$.

3. Định lí 2

a) Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = \pm\infty$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.

b) Nếu $\lim u_n = a > 0$, $\lim v_n = 0$ và $v_n > 0, \forall n > 0$ thì $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = +\infty$.

c) Nếu $\lim u_n = +\infty$ và $\lim v_n = a > 0$ thì $\lim u_n.v_n = +\infty$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. DÃY SỐ DẠNG PHÂN THỨC



Câu 1. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\dfrac{\sin 5n}{3n} - 2\right)$ bằng:

A. -2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải. Ta có $0 \le \left|\frac{\sin 5n}{3n}\right| \le \frac{1}{n}$, mà $\lim\frac{1}{n}=0$ nên $\lim\frac{\sin 5n}{3n}=0$, do đó $\lim\left(\frac{\sin 5n}{3n}-2\right)=-2$. **Chọn A.**

Nhận xét : Có thể dùng MTCT để tính (có thể chính xác hoặc gần đúng) giới hạn như sau (các bài sau có thể làm tương tự) :

Nhập $\frac{\sin(5X)}{3X}-2$.

Bấm CALC và nhập 9999999999 (một số dòng MTCT khi bấm nhiều số « 9 » thì nó báo lỗi, khi đó ta cần bấm ít số « 9 » hơn.

Bấm « = » ta được kết quả (có thể gần đúng), sau đó chọn đáp án có giá trị gần đúng với kết quả hiện trên MTCT.

Câu 2. Có bao nhiêu số tự nhiên chẵn k để $\lim\frac{n-2\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{2n}=\frac{1}{2}$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 4. **D.** Vô số.

Lời giải. Ta có $\frac{n-2\sqrt{n}\sin 2n}{2n}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n}\sin 2n}{n}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\frac{\sqrt{n^k}\cos\frac{1}{n}}{n}=0$.

Ta có $\lim\cos\frac{1}{n}=\cos 0=1$ nên bài toán trở thành tìm k sao cho

$\lim\frac{\sqrt{n^k}}{n}=\lim n^{\frac{k}{2}-1}=0 \Leftrightarrow \frac{k}{2}-1<0 \Leftrightarrow k<2 \xrightarrow[k\in\mathbb{N}^*, k=3l]{}$ không tồn tại k (do k nguyên dương và chẵn). **Chọn A.**

Câu 3. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $0\le\left|\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}\right|\le\frac{7}{n+1}\le\frac{7}{n}\to 0 \longrightarrow \lim\frac{3\sin n+4\cos n}{n+1}=0$. **Chọn B.**

Câu 4. Kết quả của giới hạn $\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)$ bằng:

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** 5. **D.** -4.

Lời giải. Ta có

$$0\le\left|\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right|\le\frac{n}{n^2+1}\le\frac{1}{n}\to 0\longrightarrow\lim\frac{n\cos 2n}{n^2+1}=0\longrightarrow\lim\left(5-\frac{n\cos 2n}{n^2+1}\right)=5.$$ **Chọn C.**

Câu 5. Kết quả của giới hạn $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim\left(n^2\sin\frac{n\pi}{5}-2n^3\right)=\lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right)$. Vì

$$\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ 0\le\left|\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}\right|\le\frac{1}{n}\to 0\end{cases}\longrightarrow\begin{cases}\lim n^3=+\infty\\ \lim\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-2<0\end{cases}\longrightarrow\lim n^3\left(\frac{1}{n}.\frac{\sin n\pi}{5}-2\right)=-\infty.$$

Chọn A.

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng:

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải. Ta có $0\le\left|\frac{(-1)^n}{n+1}\right|\le\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{n}\to 0\longrightarrow\lim\frac{(-1)^n}{n+1}=0\longrightarrow\lim\left(4+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)=4.$

Chọn C.

Câu 7. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{(-1)^n}{n^2+1}$ và $v_n=\frac{1}{n^2+2}$. Khi đó $\lim(u_n+v_n)$ có giá trị bằng:

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}0\le|u_n|\le\frac{1}{n^2+1}\le\frac{1}{n}\to 0\\ 0\le|v_n|\le\frac{1}{n^2+2}\le\frac{1}{n}\to 0\end{cases}\longrightarrow\lim u_n=\lim v_n=0\longrightarrow\lim(u_n+v_n)=0.$

Chọn B.

Chú ý : Cho $P(n), Q(n)$ lần lượt là các đa thức bậc m, k theo biến n:

$$P(x)=a_mn^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1n+a_0\ (a_m\ne 0)$$
$$Q(n)=b_kn^k+b_{k-1}n^{k-1}+\cdots+b_1n+b_0\ (b_k\ne 0)$$

Khi đó $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\lim\frac{a_mn^m}{b_kn^k}$, viết tắt $\frac{P(n)}{Q(n)}\sim\frac{a_mn^m}{b_kn^k}$, ta có các trường hợp sau :

Nếu « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ($m<k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=0$.

Nếu « bậc tử » $=$ « bậc mẫu ($m=k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{a_m}{b_k}$.

Nếu « bậc tử » $>$ « bậc mẫu ($m>k$) thì $\lim\frac{P(n)}{Q(n)}=\begin{cases}+\infty\ \ khi\ a_mb_k>0\\ -\infty\ \ khi\ a_mb_k<0\end{cases}$.

Để ý rằng nếu $P(n), Q(n)$ có chứa « căn » thì ta vẫn tính được bậc của nó. Cụ thể $\sqrt[m]{n^k}$ tì có bậc là $\frac{k}{n}$. Ví dụ $\sqrt{n}$ có bậc là $\frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{n^4}$ có bậc là $\frac{4}{3}$,...

Trong các bài sau ta có thể dùng dấu hiệu trên để chỉ ra kết quả một cách nhanh chóng !

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}$ là:

A. $-\frac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải. Ta có $\lim\frac{-3}{4n^2-2n+1}=\lim\frac{\frac{-3}{n^2}}{4-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{4}=0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng:

A. 2. **B.** 1. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Lời giải. Ta có $\lim\frac{n+2n^2}{n^3+3n-1}=\lim\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}=\frac{0}{1}=0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 0. **C.** $\frac{2}{7}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải. Ta có $\lim\frac{3n^3-2n+1}{4n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{4+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{0}{4}=0.$ **Chọn B.**

Giải nhanh : Dạng « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » nên kết quả bằng 0.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}$ bằng:

A. $\frac{3}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải. Ta có $\lim\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}=\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{0}{1}=0.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $\frac{n\sqrt{n}+1}{n^2+2}\sim\frac{n\sqrt{n}}{n^2}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 12. Cho hai dãy số (u_n) và (v_n) có $u_n=\frac{1}{n+1}$ và $v_n=\frac{2}{n+2}$. Khi đó $\lim\frac{v_n}{u_n}$ có giá trị bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. Ta có $\lim\frac{v_n}{u_n}=\lim\frac{n+1}{n+2}=\lim\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}=\frac{1}{1}=1.$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\frac{n+1}{n+2}\sim\frac{n}{n}=1.$

Câu 13. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\frac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=10.$ **B.** $a=8.$ **C.** $a=6.$ **D.** $a=4.$

Lời giải. Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{an+4}{5n+3}=\lim\dfrac{a+\dfrac{4}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{a}{5}.$ Khi đó

$$\lim u_n=2\Leftrightarrow\frac{a}{5}=2\Leftrightarrow a=10\longrightarrow \textbf{ Chọn A.}$$

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{an+4}{5n+3}\sim\dfrac{an}{5n}=\dfrac{a}{5}\Leftrightarrow a=10.$

Câu 14. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là:

A. b là một số thực tùy ý. **B.** $b=2.$

C. không tồn tại $b.$ **D.** $b=5.$

Lời giải. Ta có $\lim u_n=\lim\dfrac{2n+b}{5n+3}=\lim\dfrac{2+\dfrac{b}{n}}{5+\dfrac{3}{n}}=\dfrac{2}{5}\ (\forall b\in\mathbb{R})\longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh : $\dfrac{2n+b}{5n+3}\sim\dfrac{2n}{5n}=\dfrac{2}{5}$ với mọi $b\in\mathbb{R}.$

Câu 15. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}.$

A. $L=\dfrac{3}{2}.$ **B.** $L=\dfrac{1}{2}.$ **C.** $L=2.$ **D.** $L=1.$

Lời giải. Ta có $L=\lim\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}=\lim\dfrac{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}\sim\dfrac{n^2}{2n^2}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}.$ Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là:

A. $a=-4.$ **B.** $a=4.$ **C.** $a=3.$ **D.** $a=2.$

Lời giải. $2=\lim u_n=\lim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}=\lim\dfrac{4+\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}}{a+\dfrac{5}{n^2}}=\dfrac{4}{a}\ (a\neq 0)\Leftrightarrow a=2.$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $2\sim\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}\sim\dfrac{4n^2}{an^2}=\dfrac{4}{a}\Leftrightarrow a=2.$

Câu 17. Tính giới hạn $L=\lim\dfrac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}.$

A. $L=-\dfrac{3}{2}.$ **B.** $L=\dfrac{1}{5}.$ **C.** $L=\dfrac{1}{2}.$ **D.** $L=0.$

Lời giải. $L=\lim\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}=\lim\frac{\frac{1}{n}-3}{2+\frac{5}{n^2}-\frac{2}{n^3}}=\frac{-3}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Giải nhanh: $\frac{n^2-3n^3}{2n^3+5n-2}\sim\frac{-3n^3}{2n^3}=-\frac{3}{2}.$

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0.$

A. $a\le 0; a\ge 1.$ **B.** $0<a<1.$ **C.** $a<0;\ a>1.$ **D.** $0\le a<1.$

Lời giải. $L=\lim\frac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}=\lim\frac{\frac{5}{n^2}-3a}{(1-a)+\frac{2}{n^3}+\frac{1}{n^4}}=\frac{-3a}{(1-a)}>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<0\\a>1\end{array}\right.$. **Chọn C.**

Câu 19. Tính giới hạn $L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}.$

A. $L=-\frac{3}{2}.$ **B.** $L=1.$ **C.** $L=3.$ **D.** $L=+\infty.$

Lời giải. Ta có

$$L=\lim\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}-1\right).n^2\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(2-\frac{1}{n}\right).n^4\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\lim\frac{\left(\frac{2}{n^2}-1\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{7}{n^4}\right)}=\frac{-1.3}{2.1}=-\frac{3}{2}.$$

Chọn A.

Giải nhanh: $\frac{(2n-n^3)(3n^2+1)}{(2n-1)(n^4-7)}\sim\frac{-n^3.3n^2}{2n.n^4}=-\frac{3}{2}.$

Câu 20. Tính giới hạn $L=\lim\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}.$

A. $L=0.$ **B.** $L=1.$ **C.** $L=\frac{8}{3}.$ **D.** $L=+\infty.$

Lời giải. $L=\lim\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}=\lim\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n^3}\right)\left(4+\frac{5}{n}\right)}{\left(1-\frac{3}{n^3}-\frac{1}{n^4}\right)\left(3-\frac{7}{n^2}\right)}=\frac{1.2.4}{1.3}=\frac{8}{3}.$

Chọn C.

Giải nhanh: $\frac{(n^2+2n)(2n^3+1)(4n+5)}{(n^4-3n-1)(3n^2-7)}\sim\frac{n^2.2n^3.4n}{n^4.3n^2}=\frac{8}{3}.$

Câu 21. Tính giới hạn $L=\lim\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}.$

A. $L=\frac{1}{2}.$ **B.** $L=1.$ **C.** $L=\frac{1}{8}.$ **D.** $L=+\infty.$

Lời giải. $L=\lim\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}=\lim\frac{1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{\sqrt[3]{1+\frac{8}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1}}=1\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt[3]{n}+1}{\sqrt[3]{n+8}}\sim\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n}}=1.$

Câu 22. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}$ là:

A. $-\frac{1}{3}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải. $\lim\frac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim\frac{n^3\left(1-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{1}{n^2}-3\right)}=\lim n.\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\frac{1}{3}<0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\frac{n^3-2n}{1-3n^2}=\lim n.\frac{1-\frac{2}{n^2}}{\frac{1}{n^2}-3}=-\infty\longrightarrow$$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\frac{n^3-2n}{1-3n^2}\sim\frac{n^3}{-3n^2}=-\frac{1}{3}n\longrightarrow-\infty.$

Câu 23. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}$ là:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $+\infty$. **C.** 0 **D.** $\frac{5}{7}$.

Lời giải. $\lim\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim\frac{n^3\left(\frac{2}{n^2}+3\right)}{n^2\left(4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim n.\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim n=+\infty\\ \lim\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{3}{4}>0\end{cases}\longrightarrow \text{im}\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}=\lim n.\frac{\frac{2}{n^2}+3}{4+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=+\infty.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh : $\frac{2n+3n^3}{4n^2+2n+1}\sim\frac{3n^3}{4n^2}=\frac{3}{4}.n\longrightarrow+\infty.$

Câu 24. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3n-n^4}{4n-5}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải. $\lim\frac{3n-n^4}{4n-5}=\lim\frac{n^4\left(\frac{3}{n^3}-1\right)}{n\left(4-\frac{5}{n}\right)}=\lim n^3.\frac{\frac{3}{n^3}-1}{4-\frac{5}{n}}$. Ta có

$$\begin{cases} \lim n^3 = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{3}{n^3} - 1}{4 - \dfrac{5}{n}} = -\dfrac{1}{4} < 0 \end{cases} \longrightarrow \lim \frac{3n - n^4}{4n - 5} = 1 \lim n^3 . \frac{\dfrac{3}{n^3} - 1}{4 - \dfrac{5}{n}} = -\infty.$$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\dfrac{3n - n^4}{4n - 5} \sim \dfrac{-n^4}{4n} = -\dfrac{1}{4}.n^3 \longrightarrow -\infty.$

Câu 25. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \dfrac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4}$. **C.** $\lim \dfrac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2}$.

Lời giải. Theo dấu hiệu ở đã nêu ở phần **Chú ý** trên thì ta chọn giới hạn nào rơi vào trường hợp « bậc tử » $<$ « bậc mẫu » !

$\lim \dfrac{3 + 2n^3}{2n^2 - 1} = +\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_m b_k = 2.2 = 4 > 0.$

$\lim \dfrac{2n^2 - 3}{-2n^3 - 4} = 0$: « bậc tử » $<$ « bậc mẫu ». **Chọn B.**

$\lim \dfrac{2n - 3n^3}{-2n^2 - 1} = +\infty$: « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » và $a_n b_k = (-3).(-2) > 0.$

$\lim \dfrac{2n^2 - 3n^4}{-2n^4 + n^2} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}$: « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $\dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{-3}{-2} = \dfrac{3}{2}.$

Câu 26. Dãy số nào sau đây có giới hạn bằng $-\dfrac{1}{3}$?

B. $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{3n^2 + 5}$. **A.** $u_n = \dfrac{-n^4 + 2n^3 - 1}{3n^3 + 2n^2 - 1}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1}$. **D.** $u_n = \dfrac{-n^2 + 2n - 5}{3n^3 + 4n - 2}$.

Lời giải. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k > 0.$ **Chọn C.**

$$\lim u_n = \lim \frac{n^2 - 3n^3}{9n^3 + n^2 - 1} = \frac{-3}{9} = -\frac{1}{3}.$$

Câu 27. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n = \dfrac{1 + n^2}{5n + 5}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^2 - 2}{5n + 5n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{5n + 5n^2}$. **D.** $\dfrac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$.

Lời giải. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $>$ « bậc mẫu » với $a_m b_k > 0.$ **Chọn A.**

$$\lim u_n = \lim \frac{1 + n^2}{5n + 5} = \lim n . \frac{\dfrac{1}{n^2} + 1}{5 + \dfrac{5}{n}} = +\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim \dfrac{\dfrac{1}{n^2} + 1}{5 + \dfrac{5}{n}} = \dfrac{a_m}{b_k} = \dfrac{1}{5} > 0 \end{cases}.$$

Các đáp án còn lại đều rơi vào trường hợp « bậc tử » $\leq$ « bậc mẫu » nên cho kết quả hữa hạn.

Câu 28. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\dfrac{1 + 2n}{5n + 5n^2}$. **B.** $u_n = \dfrac{n^3 + 2n - 1}{-n + 2n^3}$. **C.** $u_n = \dfrac{2n^2 - 3n^4}{n^2 + 2n^3}$. **D.** $u_n = \dfrac{n^2 - 2n}{5n + 1}$.

Lời giải. Ta chọn đáp án dạng « bậc tử » $=$ « bậc mẫu » và $a_m b_k < 0.$ **Chọn C.**

$u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$: « bậc tử » > « bậc mẫu » và $a_m b_k=-3.2=-6<0 \longrightarrow \lim u_n=-\infty$.

Chú ý : (i) $\lim\left(a_m n^m+a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0\right)=\begin{cases}+\infty & khi\ a_n>0\\ -\infty & khi\ a_n<0\end{cases}$.

(ii) Giả sử $|q|>\max\left\{|q_i|: i=1;2\ldots;m\right\}$ thì

$$\lim\left(a.q^n+a_m q_m^n+\cdots+a_1 q_1^n+a_0\right)=\begin{cases}a_0 & khi\ |q|<1\\ +\infty & khi\ \ a>0,\ q>1.\\ -\infty & khi\ a<0,\ q>1\end{cases}$$

Ta dùng « dấu hiệu nhanh » này để đưa ra kết quả nhanh chóng cho các bài sau.

Câu 29. Tính giới hạn $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)$.

A. $L=3$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=5$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải. $L=\lim\left(3n^2+5n-3\right)=\lim n^2\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim n^2=+\infty\\ \lim\left(2+\dfrac{5}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)=2>0\end{cases}$.

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^2+5n-3\sim 3n^2\longrightarrow+\infty$.

Câu 30. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L=\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=-\infty$.

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Lời giải. Ta có $\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=\lim n^3\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=-\infty$

$\Leftrightarrow \lim\left(\dfrac{5}{n^2}-3\left(a^2-2\right)\right)=a^2-2<0\Leftrightarrow-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}\xrightarrow[a\in\mathbb{Z},a\in(-10;10)]{}a=-1;\ 0;\ 1$. **Chọn B.**

Câu 31. Tính giới hạn $\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)$.

A. $L=7$. **B.** $L=-\infty$. **C.** $L=3$. **D.** $L=+\infty$.

Lời giải. Ta có

$$\lim\left(3n^4+4n^2-n+1\right)=\lim n^4\left(3+\frac{4}{n^2}-\frac{1}{n^3}+\frac{1}{n^4}\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim n^4=+\infty\\ \lim\left(3+\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right)=3>0\end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh : $3n^4+4n^2-n+1\sim 3n^4\longrightarrow+\infty$.

Câu 32. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\ldots+\left(\sqrt{2}\right)^n$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A. $\lim u_n=-\infty$. **B.** $\lim u_n=\dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$.

C. $\lim u_n=+\infty$. **D.** Không tồn tại $\lim u_n$.

Lời giải. Vì $\sqrt{2},\left(\sqrt{2}\right)^2,\ldots,\left(\sqrt{2}\right)^n$ lập thành cấp số nhân có $u_1=\sqrt{2}=q$ nên

$$u_n=\sqrt{2}.\frac{1-\left(\sqrt{2}\right)^n}{1-\sqrt{2}}=\left(2-\sqrt{2}\right)\left[\left(\sqrt{2}\right)^n-1\right]\longrightarrow\lim u_n=+\infty \text{ vì } \begin{cases}a=2-\sqrt{2}>0\\ q=\sqrt{2}>1\end{cases}.$$ **Chọn C.**

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{8}$. **B.** 1. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}=\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}.\frac{n(n+1)}{2}$. Do đó

$$\lim \frac{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+...+\frac{n}{2}}{n^2+1}=\lim \frac{n^2+n}{4n^2+4}=\frac{1}{4}$$ (“bậc tử” = “bậc mẫu”). **Chọn D.**

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+...+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}=\frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n-1)=\frac{1}{n^2}.\frac{(n-1)(1+n-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2n^2}$.

Do đó

$$\lim\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+...+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 35. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $1+3+5+\cdots(2n-1)=\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2$ nên

$$\lim\left(\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{3n^2+4}\right)=\lim\frac{n^2}{3n^2+4}=\frac{1}{3}\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Câu 36. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$ là:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có

$$\lim\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+...+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1.$$

Chọn B.

Câu 37. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+...+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)$ bằng:

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải. Với mọi $k\in\mathbb{N}^*$ thì $\dfrac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1}-\dfrac{1}{2k+1}\right)$, do đó

$$\lim\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right)=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$
$$=\lim\frac{1}{2}\left[1-\frac{1}{2n+1}\right]=\frac{1}{2}.$$

Chọn A.

Câu 38. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right]$ bằng:

A. $\frac{11}{18}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3}\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{n+3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$$

Do đó $\lim\left(\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+......+\frac{1}{n(n+3)}\right)=\lim\frac{1}{3}\left(\frac{11}{6}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{11}{8}$. **Chọn A.**

Câu 39. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}$ bằng:

A. 4. **B.** 1. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải. Đặt $P(n)=\frac{2n^3-3n^2+n}{6}=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ thì ta có

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\left(P(2)-P(1)\right)+\left(P(3)-P(2)\right)+\cdots+\left(P(n+1)-P(n)\right)$$
$$=P(n+1)-P(1)=\frac{n(n+1)(2n+3)}{6}$$

Do đó $\lim\frac{1^2+2^2+...+n^2}{n(n^2+1)}=\lim\frac{n(n+1)(2n+3)}{6n(n^2+1)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$. **Chọn D.**

Câu 40. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_n=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=\frac{1}{2-u_n},\ n\geq 1\end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n=-1$. **B.** $\lim u_n=0$. **C.** $\lim u_n=\frac{1}{2}$. **D.** $\lim u_n=1$.

Lời giải. Giả sử $\lim u_n=a$ thì ta có

$$a=\lim u_{n+1}=\lim\frac{1}{2-u_n}=\frac{1}{2-a}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a(2-a)=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 2\\ a^2-2a+1=0\end{cases}\Leftrightarrow a=1.$$ **Chọn D.**

Câu 41. Cho dãy số có giới hạn (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}, \ n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$.

A. $\lim u_n = 1$. **B.** $\lim u_n = 0$. **C.** $\lim u_n = 2$. **D.** $\lim u_n = +\infty$.

Lời giải. Giả sử $\lim u_n = a$ thì ta có

$$a = \lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n + 1}{2} = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1 \longrightarrow$$ **Chọn A.**

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2}$ bằng:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. $\lim \dfrac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} = \lim \dfrac{\sqrt{9 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}}}{4 - \dfrac{2}{n}} = \dfrac{3}{4} \longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt{9n^2 - n + 1}}{4n - 2} \sim \dfrac{\sqrt{9n^2}}{4n} = \dfrac{3}{4}$.

Câu 43. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}}$ bằng:

A. $-\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $-\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. $\lim \dfrac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} = \lim \dfrac{-1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2}}{\sqrt{3 + \dfrac{2}{n^4}}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \longrightarrow$ **Chọn C.**

Giải nhanh : $\dfrac{-n^2 + 2n + 1}{\sqrt{3n^4 + 2}} \sim \dfrac{-n^2}{\sqrt{3n^4}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{2n + 3}}{\sqrt{2n} + 5}$ là:

A. $\dfrac{5}{2}$. **B.** $\dfrac{5}{7}$. **C.** $+\infty$. **D.** 1.

Lời giải. $\lim \dfrac{\sqrt{2n + 3}}{\sqrt{2n} + 5} = \lim \dfrac{\sqrt{2 + \dfrac{3}{n}}}{\sqrt{2} + \dfrac{5}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$ **Chọn D.**

Giải nhanh: $\dfrac{\sqrt{2n + 3}}{\sqrt{2n} + 5} \sim \dfrac{\sqrt{2n}}{\sqrt{2n}} = 1$.

Câu 45. Kết quả của giới hạn $\lim \dfrac{\sqrt{n + 1} - 4}{\sqrt{n + 1} + n}$ bằng:

A. 1. **B.** 0. **C.** -1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải. $\lim\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}=\lim\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}-\frac{4}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\frac{0}{1}=0\longrightarrow$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $\frac{\sqrt{n+1}-4}{\sqrt{n+1}+n}\sim\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 46. Biết rằng $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=a\sin\frac{\pi}{4}+b.$ Tính $S=a^3+b^3.$

A. $S=1.$ **B.** $S=8.$ **C.** $S=0.$ **D.** $S=-1.$

Lời giải. Ta có $\lim\frac{n+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2-n}-2}=\lim\frac{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}-\frac{2}{n}}=\frac{1+\sqrt{1}}{1}=2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}$

$\longrightarrow\begin{cases}a=2\sqrt{2}\\ b=0\end{cases}\longrightarrow S=8\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 47. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}$ là:

A. $+\infty.$ **B.** 10. **C.** 0. **D.** $-\infty.$

Lời giải. $\lim\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}=\lim\frac{\frac{10}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}}=\frac{0}{1}=0.$ **Chọn C.**

Giải nhanh: $\frac{10}{\sqrt{n^4+n^2+1}}\sim\frac{10}{\sqrt{n^4}}=\frac{10}{n^2}\longrightarrow 0.$

Câu 48. Kết quả của giới hạn $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}$ là:

A. $+\infty.$ **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty.$

Lời giải. $\lim(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}=\lim\sqrt{\frac{2(n+1)^3}{n^4+n^2-1}}=0$ ("bậc tử" $<$ "bậc mẫu"). **Chọn C.**

Giải nhanh: $(n+1)\sqrt{\frac{2n+2}{n^4+n^2-1}}\sim n.\sqrt{\frac{2n}{n^4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0.$

Câu 49. Biết rằng $\lim\frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=b\sqrt{3}+c$ với a, b, c là các tham số. Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{a+c}{b^3}.$

A. $P=3.$ **B.** $P=\frac{1}{3}.$ **C.** $P=2.$ **D.** $P=\frac{1}{2}.$

Lời giải. Ta có $\lim\frac{\sqrt[3]{an^3+5n^2-7}}{\sqrt{3n^2-n+2}}=\lim\frac{\sqrt[3]{a+\frac{5}{n}-\frac{7}{n^3}}}{\sqrt{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{3}\sqrt{3}$

$= b\sqrt{3} + c \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{a} = \dfrac{b}{3} \Rightarrow P = \dfrac{1}{3}. \\ c = 0 \end{cases}$ **Chọn B.**

Câu 50. Kết quả của giới hạn $\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** 1. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có

$$\lim \sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2} = \lim n\left(\sqrt[5]{\frac{200}{n^5} - 3 + \frac{2}{n^3}}\right) = -\infty \text{ vì } \begin{cases} \lim n = +\infty \\ \lim\left(\sqrt[5]{\dfrac{200}{n^5} - 3 + \dfrac{2}{n^3}}\right) = -\sqrt[5]{3} < 0 \end{cases}.$$

Chọn D.

Giải nhanh: $\sqrt[5]{200 - 3n^5 + 2n^2} \sim \sqrt[5]{-3n^5} = -\sqrt[5]{3}.n \longrightarrow -\infty$.



Vấn đề 2. DÃY SỐ CHỨA CĂN THỨC



Câu 51. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}\right)$ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 5.

Lời giải. $\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1} \sim \sqrt{n} - \sqrt{n} = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n+1}\right) = \lim \frac{4}{\sqrt{n+5} + \sqrt{n+1}} = 0 \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right)$ là:

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải. $\sqrt{n^2 - n + 1} - n \sim \sqrt{n^2} - n = 0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2 - n + 1} - n\right) = \lim \frac{-n+1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} = \lim \frac{-1 + \dfrac{1}{n}}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2}} + 1} = -\frac{1}{2} \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 - n + 1} - n = \dfrac{-n+1}{\sqrt{n^2 - n + 1} + n} \sim \dfrac{-n}{\sqrt{n^2} + n} = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2}\right)$ là:

A. -2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $\lim\left(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2}\right) = \lim n\left(\sqrt{1 - \dfrac{1}{n^2}} - \sqrt{3 + \dfrac{2}{n^2}}\right) = -\infty$ vì

$$\lim n = +\infty,\ \lim\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} - \sqrt{3 + \frac{2}{n^2}}\right) = 1 - \sqrt{3} < 0. \ \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt{3n^2 + 2} \sim \sqrt{n^2} - \sqrt{3n^2} = \left(1 - \sqrt{3}\right)n \longrightarrow -\infty$.

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - 2n}\right)$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n}}}=2.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n}-\sqrt{n^2-2n}=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+2n}+\sqrt{n^2-2n}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 55. Có bao nhiêu giá trị của a để $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=0.$

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải. $\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2+a^2n}-\sqrt{n^2+(a+2)n+1}\right)=\lim\dfrac{\left(a^2-a-2\right)n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}$

$$=\lim\frac{a^2-a-2-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{a^2-a-2}{2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-1\\ b=2\end{array}\right..$$ **Chọn B.**

Câu 56. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)$ là:

A. 0. **B.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\sim\sqrt{2n^2}-\sqrt{2n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}\right)=\lim\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}$$

$$=\lim\frac{2-\frac{1}{n}}{\sqrt{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{2-\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Chọn B.

Giải nhanh :

$$\sqrt{2n^2-n+1}-\sqrt{2n^2-3n+2}=\frac{2n-1}{\sqrt{2n^2-n+1}+\sqrt{2n^2-3n+2}}\sim\frac{2n}{\sqrt{2n^2}+\sqrt{2n^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 57. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)$ là:

A. -1. **B.** $1-\sqrt{2}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh : $\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{2n^2}=\left(1-\sqrt{2}\right)n\longrightarrow-\infty.$

Cụ thể : $\lim\left(\sqrt{n^2+2n-1}-\sqrt{2n^2+n}\right)=\lim n.\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=-\infty$ vì

$$\lim n=+\infty,\ \lim\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}}-\sqrt{2+\frac{1}{n}}\right)=1-\sqrt{2}<0\longrightarrow$$ **Chọn C.**

Câu 58. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thỏa $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=0$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** Vô số.

Lời giải. Nếu $\sqrt{n^2-8n}-n+a^2 \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

Ta có $\lim\left(\sqrt{n^2-8n}-n+a^2\right)=\lim\dfrac{\left(2a^2-8\right)n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\dfrac{2a^2-8}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}$

$=a^2-4=0 \Leftrightarrow a=\pm 2.$ **Chọn B.**

Câu 59. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)$ là:

A. $-1.$ **B.** $0.$ **C.** $1.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải. $\sqrt{n^2-2n+3}-n \sim \sqrt{n^2}-n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt{n^2-2n+3}-n\right)=\lim\frac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}=\lim\frac{-2+\dfrac{3}{n}}{\sqrt{1-\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}+1}=-1 \longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Giải nhanh : $\sqrt{n^2-2n+3}-n=\dfrac{-2n+3}{\sqrt{n^2-2n+3}+n}\sim\dfrac{-2n}{\sqrt{n^2}+n}=-1.$

Câu 60. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}$, trong đó a là tham số thực. Tìm a để $\lim u_n=-1.$

A. $3.$ **B.** $2.$ **C.** $-2.$ **D.** $-3.$

Lời giải : $\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$-1=\lim u_n=\lim\left(\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}\right)=\lim\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}$$

$$=\lim\frac{a+\dfrac{4}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{a}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Chọn C.

Giải nhanh :

$$-1\sim\sqrt{n^2+an+5}-\sqrt{n^2+1}=\frac{an+4}{\sqrt{n^2+an+5}+\sqrt{n^2+1}}\sim\frac{an}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\frac{a}{2}\Leftrightarrow a=-2.$$

Câu 61. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)$ bằng:

A. $3.$ **B.** $2.$ **C.** $0.$ **D.** $1.$

Lời giải. $\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\sim\sqrt[3]{n^3}-\sqrt[3]{n^3}=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt[3]{n^3+2}\right)=\lim\frac{-1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+\sqrt[3]{n^3+1}.\sqrt[3]{n^3+2}+\sqrt[3]{\left(n^3+2\right)}}=0. \longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Câu 62. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)$ là:

A. $\dfrac{1}{3}.$ **B.** $+\infty.$ **C.** $0.$ **D.** $1.$

Lời giải. $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\sim\sqrt[3]{-n^3}+n=0 \longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\right)=\lim\frac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(\frac{1}{n}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{1}{n}-1}+1}=\frac{1}{3}.$$

Chọn A.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^2-n^3}+n=\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{\left(n^2-n^3\right)^2}-n\sqrt[3]{n^2-n^3}+n^2}\sim\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{n^6}-n\sqrt[3]{-n^3}+n^2}=\dfrac{1}{3}.$

Câu 63. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải. $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n\right)=\lim\frac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}=\lim\frac{-2}{\sqrt[3]{\left(1-\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1-\frac{2}{n}}+1}=-\frac{2}{3}.$$

Chọn B.

Giải nhanh : $\sqrt[3]{n^3-2n^2}-n=\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{\left(n^3-2n^2\right)^2}+n.\sqrt[3]{n^3-2n^2}+n^2}\sim\dfrac{-2n^2}{\sqrt[3]{n^6}+n.\sqrt[3]{n^3}+n^2}=-\dfrac{2}{3}.$

Câu 64. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\right]$ là:

A. -1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\lim\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\lim\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1\longrightarrow$$ **Chọn D.**

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)=\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=1.$

Câu 65. Giá trị của giới hạn $\lim\left[\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\right]$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải. $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\sim\sqrt{n}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Giải nhanh : $\sqrt{n}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\sim\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{2}.$

Câu 66. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\right]$ bằng:

A. -1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\lim\frac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}=\lim\frac{4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}=2\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-3}\right)=\dfrac{4n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-3}}\sim\dfrac{4n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=2.$

Câu 67. Giá trị của giới hạn $\lim\left[n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\right]$ là:

A. $\sqrt{7}-1.$ **B.** $3.$ **C.** $\dfrac{7}{2}.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải. $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)\sim n\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}\right)=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\lim\frac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}$$

$$=\lim\frac{7}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{6}{n^2}}}=\frac{7}{2}.$$

Chọn C.

Giải nhanh : $n\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+n-6}\right)=\dfrac{7n}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+n-6}}\sim\dfrac{7n}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}}=\dfrac{7}{2}.$

Câu 68. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}$ là:

A. $1.$ **B.** $0.$ **C.** $-\infty.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải. $\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}\sim\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=\lim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)=\lim n.\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-\infty$$

$$\text{vì }\lim n=+\infty,\ \lim\left[-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}\right)\right]=-1<0\longrightarrow \textbf{Chọn C.}$$

Giải nhanh :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}-\sqrt{n^2+4}}=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+4}\right)\sim-\frac{1}{2}\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)=-n\longrightarrow-\infty.$$

Câu 69. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}$ là:

A. $1.$ **B.** $0.$ **C.** $3.$ **D.** $+\infty.$

Lời giải. $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}\sim\sqrt{9n^2}=3n\neq 0\longrightarrow$ giải nhanh :

$$\frac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}\sim\frac{\sqrt{9n^2}}{3n}=1\longrightarrow \textbf{Chọn A.}$$

Cụ thể : $\lim\dfrac{\sqrt{9n^2-n}-\sqrt{n+2}}{3n-2}=\lim\dfrac{\sqrt{9-\frac{1}{n}}-\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}}{3-\frac{2}{n}}=\dfrac{\sqrt{9}}{3}=1.$

Câu 70. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}-n}$ là:

A. 2. **B.** 0. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $\sqrt[3]{n^3+1}-n\sim\sqrt[3]{n^3}-n=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp :

$$\lim\left(\sqrt[3]{n^3+1}-n\right)=\lim\frac{1}{\sqrt[3]{\left(n^3+1\right)^2}+n\sqrt[3]{n^3+1}+n^2}=0\longrightarrow \textbf{Chọn B.}$$



Vấn đề 3. DÃY SỐ CHỨA HÀM LŨY THỪA



Câu 71. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}$ bằng:

A. $-\frac{25}{2}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{5}{2}$.

Lời giải. Giải nhanh : $\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}\sim\frac{-5^{n+2}}{2.5^n}=-\frac{25}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\frac{2-5^{n+2}}{3^n+2.5^n}=\lim\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)^n-25}{\left(\frac{3}{5}\right)^n+2}=-\frac{25}{2}$.

Câu 72. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}$ bằng:

A. -15. **B.** -10. **C.** 10. **D.** 15.

Lời giải. Giải nhanh : $\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}\sim\frac{-2.5^{n+1}}{5^n}=-10\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-2.5^{n+1}}{2^{n+1}+5^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n-10}{2.\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}=-10$.

Câu 73. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0$. **Chọn A.**

Cụ thể : $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2^n+4^n}=\lim\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n-8.\left(\frac{1}{2}\right)^n-3.\left(\frac{1}{4}\right)^n}{3.\left(\frac{1}{2}\right)^n+1}=\frac{0}{1}=0$.

Câu 74. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}$ bằng:

A. -1. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Giải nhanh : $\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}\sim\dfrac{3^n}{-2.3^n}=-\dfrac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{3^n-1}{2^n-2.3^n+1}=\lim\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-2+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=-\dfrac{1}{2}.$

Câu 75. Biết rằng $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\dfrac{a\sqrt{5}}{b}+c$ với $a,b,c\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $S=a^2+b^2+c^2$.

A. $S=26$. **B.** $S=30$. **C.** $S=21$. **D.** $S=31$.

Lời giải. Giải nhanh :

$$\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}+\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\sim\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n}{\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}}+\dfrac{2n^2}{n^2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+2\longrightarrow\begin{cases}a=1\\b=5.\\c=2\end{cases}$$

Vậy $S=1^2+5^2+2^2=30$. **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\left(\dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^n-2^{n+1}+1}{5.2^n+\left(\sqrt{5}\right)^{n+1}-3}++\dfrac{2n^2+3}{n^2-1}\right)=\lim\left(\dfrac{1-2.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}{5.\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^n+\sqrt{5}-.\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n}+\dfrac{2+\dfrac{3}{n^2}}{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$

$=\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2=\dfrac{\sqrt{5}}{5}+2.$

Câu 76. Kết quả của giới hạn $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}$ là:

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{1}{4}$.

Lời giải. Giải nhanh: $\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\dfrac{\pi^n+3^n+4^n}{3\pi^n-3^n+4.4^n}\sim\dfrac{4^n}{4.4^n}=\dfrac{1}{4}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\dfrac{\pi^n+3^n+2^{2n}}{3\pi^n-3^n+2^{2n+2}}=\lim\dfrac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n+\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+1}{3.\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^n-3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+4}=\dfrac{1}{4}.$

Câu 77. Kết quả của giới hạn $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]$ là:

A. 3. **B.** $-\sqrt{5}$. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh : Vì $3>\sqrt{5}$ nên $3^n-\sqrt{5}^n\sim3^n\longrightarrow+\infty$. **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\left[3^n-\sqrt{5}^n\right]=\lim3^n\left(1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim3^n=+\infty\\\lim1-\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)^n=1>0\end{cases}$.

Câu 78. Kết quả của giới hạn $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)$ là:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $-\infty$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải. Giải nhanh : $3^4.2^{n+1}-5.3^n \sim -5.3^n = -\infty\ (-5<0)$.$\longrightarrow$ **Chọn C.**

Cụ thể : $\lim\left(3^4.2^{n+1}-5.3^n\right)=\lim 3^n\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim 3^n=+\infty\\ \lim\left(162.\left(\frac{2}{3}\right)^n-5\right)=-5<0\end{cases}$.

Câu 79. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** $-\infty$. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh : $\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\sim\frac{3^n}{4^n}=\left(\frac{3}{4}\right)^n\longrightarrow 0$. **Chọn A.**

Cụ thể : $0\le\left|\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}\right|\le\frac{8.3^{n+1}}{4^n}=24.\left(\frac{3}{4}\right)^n\to 0\longrightarrow\lim\frac{3^n-4.2^{n+1}-3}{3.2n+4^n}=0.$

Câu 80. Kết quả của giới hạn $\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}$ là:

A. $+\infty$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có $2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\Rightarrow 2^n\ge C_n^3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\sim\frac{n^3}{6}\Rightarrow\begin{cases}\frac{n}{2^n}\to 0\\ \frac{2^n}{n^2}\to+\infty\end{cases}$. Khi đó:

$$\lim\frac{2^{n+1}+3n+10}{3n^2-n+2}=\lim\frac{2^n}{n^2}.\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\frac{2^n}{n^2}=+\infty\\ \lim\frac{2+3.\frac{n}{2^n}+10.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}=\frac{2}{3}>0\end{cases}.$$

Chọn A.

Câu 81. Tìm tất cả giá trị nguyên của a thuộc $(0;2018)$ để $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}\le\frac{1}{1024}$.

A. 2007. **B.** 2008. **C.** 2017. **D.** 2016.

Lời giải. Giải nhanh: $\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+2}}}\sim\sqrt[4]{\frac{4^n}{4^{n+a}}}=\frac{1}{2^a}\le\frac{1}{1024}\Leftrightarrow 2^a\ge 1024=2^{10}\Leftrightarrow a\ge 10.$

Mà $a\in(0;2018)$ và $a\in\mathbb{Z}$ nên $a\in\{10;2017\}\longrightarrow$ có 2008 giá trị a. **Chọn B.**

Cụ thể : $\lim\sqrt[4]{\frac{4^n+2^{n+1}}{3^n+4^{n+a}}}=\lim\sqrt[4]{\frac{1+2.\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+4^a}}=\sqrt{\frac{1}{4^a}}=\sqrt{\frac{1}{\left(2^a\right)^2}}=\frac{1}{2^a}.$

Câu 82. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **B.** -1. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\lim\frac{(-1)^n}{3^n}$. Ta có

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}=\lim\frac{\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{3-\frac{1}{n}}=\frac{1}{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n}{3^n}\right|\le\left(\frac{1}{3}\right)^n\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n}{3^n}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}}{3n-1}+\frac{(-1)^n}{3^n}\right)=\frac{1}{3}.$$ **Chọn C.**

Câu 83. Kết quả của giới hạn $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)$ bằng:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** -1.

Lời giải. $\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\lim\left(\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}+\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}}\right)$. Ta có :

$$\begin{cases}\lim\frac{\sqrt{3n}}{\sqrt{n}-1}=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}\\ 0\le\left|\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right|\le\frac{1}{\sqrt{n}-1}\to 0\Rightarrow\lim\frac{(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\left(\frac{\sqrt{3n}+(-1)^n\cos 3n}{\sqrt{n}-1}\right)=\sqrt{3}.$$

Chọn B.

Câu 84. Có bao nhiêu giá trị nguyên của a thuộc $(0;20)$ sao cho $\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}$ là một số nguyên.

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải. Ta có $$\begin{cases}\lim\frac{an^2-1}{3+n^2}=\lim\frac{a-\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2}+1}=a\\ \lim\frac{1}{2^n}=\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0\end{cases}\Rightarrow\lim\sqrt{3+\frac{an^2-1}{3+n^2}-\frac{1}{2^n}}=\sqrt{3+a}.$$

Ta có $\begin{cases}a\in(0;20),\ a\in\mathbb{Z}\\ \sqrt{a+3}\in\mathbb{Z}\end{cases}\longrightarrow a\in\{1;6;13\}$. **Chọn B.**

Câu 85. Kết quả của giới hạn $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}$ là:

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=\lim\sqrt{3^n}.\sqrt{2-\frac{n}{3^n}+2.\left(\frac{1}{3}\right)^n}$. Vì

$$\left.\begin{array}{l}\lim\sqrt{3^n}=+\infty \\ 0\le\dfrac{n}{3^n}\le\dfrac{n}{C_n^2}=\dfrac{n}{\dfrac{n(n-1)}{2}}=\dfrac{2}{n-1}\to 0\Rightarrow\lim\dfrac{n}{3^n}=0 \\ \lim\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0\end{array}\right\}\longrightarrow\begin{cases}\lim\sqrt{3^n}=+\infty \\ \lim\sqrt{2-\dfrac{n}{3^n}+2.\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=\sqrt{2}>0\end{cases},$$

do đó $\lim\sqrt{2.3^n-n+2}=+\infty$. **Chọn D.**



Vấn đề 4. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN



Câu 86. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\dfrac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là:

A. $u_1=3.$ **B.** $u_1=4.$ **C.** $u_1=\dfrac{9}{2}.$ **D.** $u_1=5.$

Lời giải. Gọi q là công bội của cấp số nhân, ta có :

$$\begin{cases}\dfrac{u_1}{1-q}=2 \\ S_3=u_1.\dfrac{1-q^3}{1-q}=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u_1=2(1-q) \\ 2\left(1-q^3\right)=\dfrac{9}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}q=-\dfrac{1}{2} \\ u_1=2\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=3\end{cases}.$$ **Chọn A.**

Câu 87. Tính tổng $S=9+3+1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^{n-3}}+\cdots$.

A. $S=\dfrac{27}{2}.$ **B.** $S=14.$ **C.** $S=16.$ **D.** $S=15.$

Lời giải. Ta có

$$S=9+3+1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^{n-3}}+\cdots=9\left(\underbrace{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=\frac{1}{3}}\right)=9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{27}{2}.$$

Chọn A.

Câu 88. Tính tổng $S=\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}+\cdots\right)$.

A. $S=\sqrt{2}+1.$ **B.** $S=2.$ **C.** $S=2\sqrt{2}.$ **D.** $S=\dfrac{1}{2}.$

Lời giải. Ta có

$$S=\sqrt{2}\left(\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)=2\sqrt{2}.$$ **Chọn C.**

Câu 89. Tính tổng $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots$.

A. $S=3$. **B.** $S=4$. **C.** $S=5$. **D.** $S=6$.

Lời giải. Ta có

$$S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^n}{3^n}+\cdots=\underbrace{1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^n+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\frac{2}{3}}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$ **Chọn A.**

Câu 90. Tổng của cấp số nhân vô hạn $\frac{1}{2},-\frac{1}{6},\frac{1}{18},\ldots,\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}},\ldots$ bằng:

A. $\frac{3}{4}$. **B.** $\frac{8}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{3}{8}$.

Lời giải. Ta có :

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{2.3^{n-1}}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\underbrace{1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n-1}}}_{CSN\ lvh: u_1=1,\ q=-\frac{1}{3}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{8}.$$ **Chon D.**

Câu 91. Tính tổng $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$.

A. 1. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải. Ta có

$$S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$$

$$=\left(\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=q=\frac{1}{2}}\right)-\left(\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots}_{CSN\ lvh: u_1=q=\frac{1}{3}}\right)=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

Chọn D.

Câu 92. Giá trị của giới hạn $\lim\frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}\left(|a|<1,|b|<1\right)$ bằng:

A. 0. **B.** $\frac{1-b}{1-a}$. **C.** $\frac{1-a}{1-b}$. **D.** Không tồn tại.

Lời giải. Ta có $1+a+a^2+\ldots+a^n$ là tổng $n+1$ số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu là 1 và công bội là a, nên $1+a+a^2+\ldots+a^n=\frac{1.\left(1-a^{n+1}\right)}{1-a}=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Tương tự: $1+b+b^2+\ldots+b^n=\frac{1\left(1-b^{n+1}\right)}{1-b}=\frac{1-b^{n+1}}{1-b}$.

Do đó $\lim \dfrac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n} = \lim \dfrac{\dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}}{\dfrac{1-b^{n+1}}{1-b}} = \lim \dfrac{1-b}{1-a}.\dfrac{1-a^{n+1}}{1-b^{n+1}} = \dfrac{1-b}{1-a}$ $\left(|a|<1,|b|<1\right)$.

Chọn B.

Câu 93. Rút gọn $S = 1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots$ với $\cos x \neq \pm 1$.

A. $S=\sin^2 x$. **B.** $S=\cos^2 x$. **C.** $S=\dfrac{1}{\sin^2 x}$. **D.** $S=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Lời giải. Ta có

$$S = \underbrace{1+\cos^2 x+\cos^4 x+\cos^6 x+\cdots+\cos^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=\cos^2 x} = \frac{1}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 94. Rút gọn $S = 1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots$ với $\sin x \neq \pm 1$.

A. $S=\sin^2 x$. **B.** $S=\cos^2 x$. **C.** $S=\dfrac{1}{1+\sin^2 x}$. **D.** $S=\tan^2 x$.

Lời giải. Ta có

$$S = \underbrace{1-\sin^2 x+\sin^4 x-\sin^6 x+\cdots+(-1)^n.\sin^{2n} x+\cdots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,\ q=-\sin^2 x} = \frac{1}{1+\sin^2 x}.$$ **Chọn C.**

Câu 95. Thu gọn $S = 1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots$ với $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

A. $S=\dfrac{1}{1-\tan\alpha}$. **B.** $S=\dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}$. **C.** $S=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$. **D.** $S=\tan^2\alpha$.

Lời giải. Ta có $\tan\alpha \in (0;1)$ với mọi $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$, do đó

$$S = \underbrace{1-\tan\alpha+\tan^2\alpha-\tan^3\alpha+\ldots}_{CSN\ lvh:\ u_1=1,q=-\tan\alpha} = \frac{1}{1+\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}.$$ **Chọn B.**

Câu 96. Cho m, n là các số thực thuộc $(-1;1)$ và các biểu thức:

$$M = 1+m+m^2+m^3+\cdots$$
$$N = 1+n+n^2+n^3+\cdots$$
$$A = 1+mn+m^2n^2+m^3n^3+\cdots$$

Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $A=\dfrac{MN}{M+N-1}$. **B.** $A=\dfrac{MN}{M+N+1}$.

C. $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}-\dfrac{1}{MN}$. **D.** $A=\dfrac{1}{M}+\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{MN}$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases} M=\dfrac{1}{1-m} \\ N=\dfrac{1}{1-n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1-\dfrac{1}{M} \\ n=1-\dfrac{1}{N} \end{cases}$, khi đó

$$A = \frac{1}{1-mn} = \frac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{M}\right)\left(1-\dfrac{1}{N}\right)} = \frac{MN}{M+N-1}.$$ **Chọn A.**

Câu 97. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính tổng $T = a + b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Lời giải. Ta có $0,5111\cdots = 0,5 + 10^{-2} + 10^{-3} + \cdots + 10^{-n} + \cdots$

Dãy số $10^{-2}; 10^{-3}; ...; 10^{-n}; ...$ là một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu bằng $u_1 = 10^{-2}$, công bội bằng $q = 10^{-1}$ nên $S = \frac{u_1}{1-q} = \frac{10^{-2}}{1-10^{-1}} = \frac{1}{90}$.

Vậy $0,5111... = 0,5 + S = \frac{46}{90} = \frac{23}{45} \longrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 45 \end{cases} \longrightarrow T = a + b = 68$. **Chọn B.**

Câu 98. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Lời giải. Ta có

$$A = 0,353535... = 0,35 + 0,0035 + ... = \frac{35}{10^2} + \frac{35}{10^4} + ... = \frac{\frac{35}{10^2}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{35}{99} \Rightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 99 \end{cases} \Rightarrow T = 3465..$$

Chọn B.

Câu 99. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $B = 5,231231...$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = a - b$.

A. 1409. **B.** 1490. **C.** 1049. **D.** 1940.

Lời giải. Ta có

$$B = 5,231231... = 5 + 0,231 + 0,000231 + ...$$

$$= 5 + \frac{231}{10^3} + \frac{231}{10^6} + ... = 5 + \frac{\frac{231}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^3}} = 5 + \frac{231}{999} = \frac{1742}{333} \longrightarrow \begin{cases} a = 1742 \\ b = 333 \end{cases} \Rightarrow T = 1409$$

Chọn A.

Câu 100. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0,17232323\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a - b > 2^{15}$. **B.** $a - b > 2^{14}$. **C.** $a - b > 2^{13}$. **D.** $a - b > 2^{12}$.

Lời giải. Ta có

$$0,17232323\ldots = 0,17 + 23\left(\frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \frac{1}{10^8}\cdots\right)$$

$$= \frac{17}{100} + 23.\frac{\frac{1}{10000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{17}{100} + \frac{23}{100.99} = \frac{1706}{9900} = \frac{853}{4950}\ .$$

$$\longrightarrow \begin{cases} a = 853 \\ b = 4950 \end{cases} \Rightarrow 2^{12} < T = 4097 < 2^{13}.$$

Chọn D.

❍ Bài 02

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

I – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

1. Định nghĩa

Định nghĩa 1

Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$.

Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ hay $f(x)\to L$ khi $x\to x_0$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với c là hằng số.

2. Định lí về giới hạn hữu hạn

Định lí 1

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

b) Nếu $f(x)\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geq 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

3. Giới hạn một bên

Định nghĩa 2

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(x_0;b)$.

Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L$.

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;x_0)$.

Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=L$.

Định lí 2

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L.}$$

II – GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa 3

a) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(-\infty;a)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là số L khi $x \to -\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n < a$ và $x_n \to -\infty$, ta có $f(x_n) \to L$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Chú ý:

a) Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

$\lim\limits_{x \to +\infty} c = c$; $\lim\limits_{x \to -\infty} c = c$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{c}{x^k} = 0$.

b) Định lí 1 về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x \to x_0$ vẫn còn đúng khi $x_n \to +\infty$ hoặc $x \to -\infty$.

III – GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn vô cực

Định nghĩa 4

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$.

Ta nói hàm số $y = f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x \to +\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n > a$ và $x_n \to +\infty$, ta có $f(x_n) \to -\infty$.

Kí hiệu: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \left(-f(x)\right) = -\infty$.

2. Một vài giới hạn đặc biệt

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ với k nguyên dương.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn} \\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ} \end{cases}$.

3. Một vài quy tắc về giới hạn vô cực

a) Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x).g(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \left[f(x)g(x)\right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
	$-\infty$	$+\infty$

b) Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
		$-$	$-\infty$
$L<0$		$+$	$-\infty$
		$-$	$+\infty$

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. DÃY SỐ CÓ GIỚI HẠN HỮU HẠN



Câu 1. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ là:

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right) = 3.2^2+7.2+11 = 37 \longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 2. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\left|x^2-4\right|$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\left|x^2-4\right| = \left|\left(\sqrt{3}\right)^2-4\right| = 1 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 3. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{2}$ là:

A. $\sin\dfrac{1}{2}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 0.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{2} = 0.\sin\dfrac{1}{2} = 0 \longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 4. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2} = \dfrac{(-1)^2-3}{(-1)^3+2} = -2 \longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 5. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-x^3}{(2x-1)\left(x^4-3\right)}$ là:

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** $-\frac{3}{2}$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^3}{(2x-1)(x^4-3)}=\frac{1-1^3}{(2.1-1)(1^4-3)}=0\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 6. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-1|}{x^4+x-3}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** $-\frac{2}{3}$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\frac{|x-1|}{x^4+x-3}=\frac{|-1-1|}{1-1-3}=-\frac{2}{3}\longrightarrow$ **Chọn D.**

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}=\frac{\sqrt{3+1}+1}{-1-1}=-\frac{3}{2}\longrightarrow$ **Chọn A.**

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}$ là:

A. $\frac{1}{5}$. **B.** $\sqrt{5}$. **C.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **D.** 5.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\frac{9x^2-x}{(2x-1)(x^4-3)}}=\sqrt{\frac{9.3^2-3}{(2.3-1)(3^4-3)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\longrightarrow$ **Chọn C.**

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}$ là:

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{1}{5}$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[3]{\frac{x^2-x+1}{x^2+2x}}=\sqrt{\frac{2^2-2+1}{2^2+2.2}}=\frac{1}{2}\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 10. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}$ là:

A. $-\frac{3}{2}$. **B.** $-\frac{2}{3}$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{3x^2-4}-\sqrt{3x-2}}{x+1}=\frac{\sqrt[3]{12-4}-\sqrt{6-2}}{3}=\frac{0}{3}=0\longrightarrow$ **Chọn C.**



Vấn đề 2. GIỚI HẠN MỘT BÊN



Câu 11. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x-15}{x-2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\frac{15}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}(x-15)=-13<0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)=0 \ \& \ x-2>0, \forall x>2 \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}=-\infty.$ **Chọn A.**

Câu 12. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** Không xác định.

Lời giải. $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x+2}=2>0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x-2}=0 \ \& \ \sqrt{x-2}>0, \forall x>2 \end{cases} \longrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-2}}=+\infty.$ **Chọn B.**

Câu 13. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to (-2)^+}\dfrac{|3x+6|}{x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** 3. **C.** $+\infty$. **D.** Không xác định.

Lời giải. Ta có $|x+2|=x+2$ với mọi $x>-2$, do đó :

$$\lim\limits_{x\to (-2)^+}\frac{|3x+6|}{x+2}=\lim\limits_{x\to (-2)^+}\frac{3|x+2|}{x+2}=\lim\limits_{x\to (-2)^+}\frac{3(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to (-2)^+}3=3\longrightarrow$$ **Chọn B.**

Câu 14. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2-x}{(2-x)(1-2x)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{1-2x}=-\dfrac{1}{3}.$ **Chọn C.**

Câu 15. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3^+}\dfrac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}$ là:

A. -2. **B.** 2. **C.** 0. **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải. Ta có $x+3>0$ với mọi $x>-3$, nên:

$$\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{x^2+13x+30}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{(x+3)(x+10)}{\sqrt{(x+3)(x^2+5)}}=\lim\limits_{x\to -3^+}\frac{\sqrt{x+3}.(x+10)}{\sqrt{x^2+5}}=\frac{\sqrt{-3+3}(-3+7)}{\sqrt{(-3)^2+5}}=0.$$

Chọn C.

Câu 16. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1 \\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\ge 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{3x^2+1}=\sqrt{3.1^2+1}=2\longrightarrow$ **Chọn B.**

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1 \\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\ge 1 \end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ là:

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2+1}{1-x}=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+1\right)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(1-x)=0\ \&\ 1-x>0\ (\forall x<1)\end{cases}$. **Chọn A.**

Câu 18. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-3 & \text{với } x\geq 2\\ x-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** Không tồn tại.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-3\right)=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x-1)=1\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=1.$

Chọn C.

Câu 19. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2}+3 & \text{với } x\geq 2\\ ax-1 & \text{với } x<2\end{cases}$. Tìm a để tồn tại $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

A. $a=1$. **B.** $a=2$. **C.** $a=3$. **D.** $a=4$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(ax-1)=2a-1\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(\sqrt{x-2}+3\right)=3\end{cases}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ tồn tại $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)\Leftrightarrow 2a-1=3\Leftrightarrow a=2.$ **Chọn B.**

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$. **B.** Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.

C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$. **D.** $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15$.

Lời giải. Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\left(x^2-2x+3\right)=6\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(3-2x^2\right)=-15\end{cases}\longrightarrow \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

$\longrightarrow$ không tồn tại giới hạn khi $x\to 3$.

Vậy chỉ có khẳng định C sai. **Chọn C.**



Vấn đề 3. GIỚI HẠN TẠI VÔ CỰC



Câu 21. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là:

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(x-x^3+1\right)=\lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to -\infty} x^3=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{1}{x^2}-1+\dfrac{1}{x^3}\right)=-1<0\end{cases}$.

Chọn D.

Giải nhanh: $x-x^3+1\sim(-1)x^3\longrightarrow+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 22. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có

$$\lim_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-x^3+2x^2-3x\right)=\lim_{x\to-\infty}x^3\left(-1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)=+\infty.$$ **Chọn B.**

Giải nhanh: $|x|^3+2x^2+3|x|\sim|x|^3\to+\infty$ khi $x\to-\infty$.

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt{x^2+1}+x\sim\sqrt{x^2}+x=2x\to+\infty$. **Chọn B.**

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1=2>0\end{cases}.$$

Câu 23. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to+\infty:\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}+1\right)x\to+\infty$.

Chọn B.

Đặt x làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=+\infty \text{ vì}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}+\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}+1>0\end{cases}.$$

Câu 25. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)$ là:

A. 4. **B.** $-\infty$. **C.** 6. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to+\infty:x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)\sim x\left(\sqrt{4x^2}+2x\right)=4x^2\to+\infty$.

Chọn D.

Đặt x^2 làm nhân tử chung:

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{4x^2+7x}+2x\right)=\lim_{x\to+\infty}x^2\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=+\infty \text{ vì } \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4+\frac{7}{x}}+2\right)=4>0\end{cases}.$$



Vấn đề 4. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{0}{0}$



Câu 26. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^3-8}{x^2-4}$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** Không xác định.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}=\dfrac{12}{4}=3$

Chọn C.

Câu 27. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}$ là:

A. $-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\dfrac{3}{5}$. **C.** $-\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{5}{3}$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^5+1}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^3+x^2-x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{5}{3}$.

Chọn D.

Câu 28. Biết rằng $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2}=a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2x^3+3\sqrt{3}}{3-x^2}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2(x+\sqrt{3})(x^2-\sqrt{3}x+3)}{(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)}=\lim\limits_{x\to -\sqrt{3}}\dfrac{2(x^2-\sqrt{3}x+3)}{\sqrt{3}-x}$

$=\dfrac{2\left[(-\sqrt{3})^2-\sqrt{3}.(-\sqrt{3})+3\right]}{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}=\dfrac{18}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{3}\longrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\end{cases}\Rightarrow a^2+b^2=10$. **Chọn A.**

Câu 29. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải. $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{-x^2-x+6}{x^2+3x}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)}\right|=\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{x-2}{x}\right|=\left|\dfrac{-3-2}{-3}\right|=\dfrac{5}{3}$. **Chọn C.**

Câu 30. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}$ là:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** 0. **C.** $\dfrac{5}{3}$. **D.** $\dfrac{3}{5}$.

Lời giải. Ta có $3-x>0$ với mọi $x<3$, do đó:

$\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{27-x^3}}=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{3-x}{\sqrt{(3-x)(9+3x+x^2)}}$

$=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{9+3x+x^2}}=\dfrac{\sqrt{3-3}}{\sqrt{9+3.3+3^2}}=0$. **Chọn B.**

Câu 31. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+\pi^{21})\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}$ là:

A. $-\dfrac{2\pi^{21}}{7}$. **B.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{9}$. **C.** $-\dfrac{2\pi^{21}}{5}$. **D.** $\dfrac{1-2\pi^{21}}{7}$.

Lời giải. Ta có

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\sqrt[7]{1-2x}-\pi^{21}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2+\pi^{21}\right)\left(\sqrt[7]{1-2x}-1\right)}{x}+\lim_{x\to 0}x=-\frac{2\pi^{21}}{7}.$$ **Chọn A.**

Câu 32. Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}$ là:

A. 0. **B.** $-\infty$. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x}}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(x^2+x\right)-x}{x^2\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}}=+\infty$

vì $1>0$; $\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}\right)=0$ và $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x}>0$ với mọi $x>0$. **Chọn D.**

Câu 33. Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$ là:

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{(4x+4-8)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$

$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{(4x+4)^2}+2\sqrt[3]{4x+4}+4\right)}{4\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{12}{12}=1.$ **Chọn C.**

Câu 34. Giá trị của giới hạn $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{13}{12}$. **C.** $\frac{11}{12}$. **D.** $-\frac{13}{12}$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{2\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{8-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2\sqrt{1+x}-2}{x}+\frac{2-\sqrt[3]{8-x}}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\sqrt{x+1}+1}+\frac{1}{4+2\sqrt[3]{8-x}+\sqrt[3]{(8-x)^2}}\right)=1+\frac{1}{12}=\frac{13}{12}.$ **Chọn B.**

Câu 35. Biết rằng $b>0, a+b=5$ và $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=2$. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $1<a<3$. **B.** $b>1$. **C.** $a^2+b^2>10$. **D.** $a-b<0$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{ax+1}-\sqrt{1-bx}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{ax+1}-1}{x}+\frac{1-\sqrt{1-bx}}{x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{ax}{x\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{bx}{x\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{a}{\left(\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}+\frac{b}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)}\right)=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2.$

Vậy ta được: $\begin{cases}a+b=5\\ \frac{a}{3}+\frac{b}{2}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ 2a+3b=12\end{cases}\Leftrightarrow a=3, b=2\longrightarrow$ **Chọn A.**



Vấn đề 5. DẠNG VÔ ĐỊNH $\frac{\infty}{\infty}$



Câu 36. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^2}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}=2$. **Chọn D.**

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\frac{2x^2+5x-3}{x^2+6x+3}\sim\frac{2x^2}{x^2}=2$.

Câu 37. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** 2.

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}x.\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{3}{x^3}}{1+\frac{6}{x}+\frac{3}{x^2}}=-\infty$. **Chọn C.**

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\frac{2x^3+5x^2-3}{x^2+6x+3}\sim\frac{2x^3}{x^2}=2x\to-\infty$.

Câu 38. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^3}-\frac{7}{x^4}+\frac{11}{x^6}}{3+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^6}}=\frac{0}{3}=0$. **Chọn C.**

Giải nhanh : khi $x\to-\infty$ thì : $\frac{2x^3-7x^2+11}{3x^6+2x^5-5}\sim\frac{2x^3}{3x^6}=\frac{2}{3}.\frac{1}{x^3}\to0$.

Câu 39. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ là:

A. -2. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải. Khi $x\to-\infty$ thì $\sqrt{x^2}=-x\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=-x-x=-2x\neq0$

$\longrightarrow$ chia cả tử và mẫu cho x, ta được $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{3}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=-1$.

Chọn D.

Câu 40. Biết rằng $\frac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$ có giới hạn là $+\infty$ khi $x\to+\infty$ (với a là tham số). Tính giá trị nhỏ nhất của $P=a^2-2a+4$.

A. $P_{\min}=1$. **B.** $P_{\min}=3$. **C.** $P_{\min}=4$. **D.** $P_{\min}=5$.

Lời giải. Khi $x \to +\infty$ thì $\sqrt{x^2} = x \longrightarrow \sqrt{x^2+1} - x \sim \sqrt{x^2} - x = x - x = 0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right)\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right)$.

Vì $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1\right) = 4 > 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2-a)x-3}{\sqrt{x^2+1}-x} = +\infty$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-a-\dfrac{3}{x}\right) = 2-a > 0 \Rightarrow a < 2$.

Giải nhanh : ta có $x \to +\infty \longrightarrow \dfrac{2x-3}{\sqrt{x^2+1}-x}$

$= \left((2-a)x-3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) \sim (2-a)x.\left(\sqrt{x^2}+x\right) = 2(2-a)x \to +\infty \Leftrightarrow a < 2$.

Khi đó $P = a^2 - 2a + 4 = (a-1)^2 + 3 \ge 3$, $P = 3 \Leftrightarrow a = 1 < 2 \Rightarrow P_{\min} = 3$. **Chọn B.**

Câu 41. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1}$ là:

A. -2. **B.** -1. **C.** -2. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Giải nhanh: khi $x \to -\infty \longrightarrow \dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} \sim \dfrac{\sqrt{4x^2}}{x} = \dfrac{-2x}{x} = -2$. **Chọn C.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-x+1}}{x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-\sqrt{4-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\sqrt{4}}{1} = -2$.

Câu 42. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ là:

A. $-\dfrac{1}{5}$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\infty$. **D.** $\dfrac{1}{5}$.

Lời giải. Giải nhanh : khi

$$x \to +\infty \longrightarrow \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} \sim \dfrac{\sqrt{4x^2}-x}{\sqrt{9x^2}+2x} = \dfrac{2x-x}{3x+2x} = \dfrac{1}{5}.$$ **Chọn D.**

Cụ thể : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{4-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}+\dfrac{2}{x}-1}{\sqrt{9-\dfrac{3}{x}}+2} = \dfrac{1}{5}$.

Câu 43. Biết rằng $L = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx} > 0$ là hữu hạn (với a, b là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng.

A. $a \ge 0$. **B.** $L = -\dfrac{3}{a+b}$ **C.** $L = \dfrac{3}{b-\sqrt{a}}$ **D.** $b > 0$.

Lời giải. Ta phải có $ax^2 - 3x > 0$ trên $(-\infty;\alpha) \Leftrightarrow a \ge 0$.

Ta có $x \to -\infty \longrightarrow \sqrt{4x^2-2x+1}+2-x \sim \sqrt{4x^2} - x = -3x \ne 0$.

Như vậy xem như "tử" là một đa thức bậc 1. Khi đó $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}>0$ khi và chỉ khi $\sqrt{ax^2-3x}+bx$ là đa thức bậc 1.

Ta có $\sqrt{ax^2-3x}+bx\sim\sqrt{ax^2}+bx=\left(-\sqrt{a}+b\right)x\longrightarrow-\sqrt{a}+b\neq0.$

Khi đó $\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{ax^2-3x}+bx}\sim\dfrac{-3x}{\left(-\sqrt{a}+b\right)x}=\dfrac{3}{b-\sqrt{a}}=L>0\Leftrightarrow b-\sqrt{a}>0\Rightarrow b>\sqrt{a}.$

Chọn B.

Câu 44. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}$ là:

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** 0. **C.** $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** 1.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}\sim\dfrac{\sqrt[3]{x^3}}{\sqrt{2x^2}}=\dfrac{x}{-\sqrt{2}x}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **Chọn C.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2+1}}{\sqrt{2x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^3}}}{-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}.$

Câu 45. Tìm tất cả các giá trị của a để $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)$ là $+\infty$.

A. $a>\sqrt{2}$. **B.** $a<\sqrt{2}$. **C.** $a>2$. **D.** $a<2$.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{2x^2+1}+ax\sim\sqrt{2x^2}+x$

$=-\sqrt{2}x+ax=\left(a-\sqrt{2}\right)x\to+\infty\Leftrightarrow a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}$. **Chọn B.**

Cụ thể: vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$ nên $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{2x^2+1}+ax\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=+\infty$

$\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}+a\right)=a-\sqrt{2}<0\Leftrightarrow a<\sqrt{2}.$



Vấn đề 6. DẠNG VÔ ĐỊNH $\infty-\infty$



Câu 46. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow2x^3-x^2\sim2x^3\to-\infty$. **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2x^3-x^2\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ vì $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty\\\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)=2>0\end{cases}.$

Câu 47. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)$ là:

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+2-1}{x^2-4}\right)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\dfrac{x+1}{x^2-4}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to 2^-}(x+1)=3>0$; $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2-4\right)=0$ và $x^2-4<0$ với mọi $x\in(-2;2)$. **Chọn A.**

Câu 48. Biết rằng $a+b=4$ và $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn. Tính giới hạn $L=\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{b}{1-x^3}-\dfrac{a}{1-x}\right)$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** -2.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{a+ax+ax^2-b}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$ hữu hạn $\Leftrightarrow 1+a.1+a.1^2-b=0\Leftrightarrow 2a-b=-1$.

Vậy ta có $\begin{cases}a+b=4\\2a-b=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\b=3\end{cases}\Rightarrow L=-\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{a}{1-x}-\dfrac{b}{1-x^3}\right)$

$=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}=-\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{-(x+2)}{1+x+x^2}=1$. **Chọn C.**

Câu 49. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=+\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+2}-1\right)=\sqrt{2}-1>0$. **Chọn B.**

Giải nhanh : $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{1+2x^2}-x\sim\sqrt{2x^2}-x=\sqrt{2}x-x=\left(\sqrt{2}-1\right)x\to+\infty$.

Câu 50. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x\sim\sqrt{x^2}-x=x-x=0\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp.

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\sim\dfrac{1}{\sqrt{x^2}+x}=\dfrac{1}{2x}\to 0$. **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}+1}=\dfrac{0}{2}=0$.

Câu 51. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-5$.

Lời giải: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\sim\sqrt{5x^2}+x\sqrt{5}=-\sqrt{5}x+x\sqrt{5}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to-\infty\longrightarrow\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}$

$$=\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}\sim\frac{2x}{\sqrt{5x^2}-x\sqrt{5}}=\frac{2x}{-2\sqrt{5}x}=-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Cụ thể: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x}{\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{-\sqrt{5+\frac{2}{x}}+\sqrt{5}}=\frac{2}{-2\sqrt{5}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{1}{5}\sqrt{5}\longrightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{5}\\b=0\end{cases}\Rightarrow S=-1.$$ **Chọn A.**

Câu 52. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ là:

A. $\frac{7}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\sim\sqrt{x^2}-\sqrt{x^2}=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}$

$$=\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}\sim\frac{-x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\frac{-x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$ **Chọn B.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+\sqrt{1+\frac{4}{x}}}=-\frac{1}{2}.$$

Câu 53. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)$ là:

A. $\sqrt[3]{3}+1$. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt[3]{3}-1$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Giải nhanh:

$$x\to-\infty\longrightarrow\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\sim\sqrt[3]{3x^3}+\sqrt{x^2}=\left(\sqrt[3]{3}-1\right)x\to-\infty.$$ **Chọn D.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3x^3-1}+\sqrt{x^2+2}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=-\infty$

Vì $\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{3-\frac{1}{x^3}}-\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)=\sqrt[3]{3}-1>0.$

Câu 54. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$ là:

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Khi $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\sim\sqrt{x^2}--\sqrt[3]{x^3}=x-x=0$

$\longrightarrow$ Nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}=\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)+\left(x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\sim\frac{x}{\sqrt{x^2}+x}+\frac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3}+\sqrt[6]{x^6}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}\ (x\to+\infty).$$ **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x+x-\sqrt[3]{x^3-x^2}\right)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}+\dfrac{x^2}{x^2+x\sqrt[3]{x^3-1}+\sqrt[3]{\left(x^3-1\right)^2}}\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{6}.$

Câu 55. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)$ là:

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** -1. **D.** $-\infty$.

Lời giải. $x\to+\infty\longrightarrow\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\sim\sqrt[3]{2x}-\sqrt[3]{2x}=0\longrightarrow$ nhân lượng liên hợp:

Giải nhanh: $\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}=$

$\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{4x^2-1}-\sqrt[3]{(2x+1)^2}}\sim\dfrac{-2}{\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}+\sqrt[3]{4x^2}}=\dfrac{-2}{3\sqrt[3]{4x^2}}\to 0.$ **Chọn A.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{2x-1}-\sqrt[3]{2x+1}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\sqrt[3]{(2x-1)^2}+\sqrt[3]{(2x-1)(2x+1)}+\sqrt[3]{(2x+1)^2}}=0.$



Vấn đề 7. DẠNG VÔ ĐỊNH $0.\infty$



Câu 56. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$ là:

A. $+\infty$. B. -1. C. 0. D. $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]=\lim\limits_{x\to 0}(x-1)=0-1=-1.$ **Chọn B.**

Câu 57. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}$ là:

A. 1. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2)\sqrt{\dfrac{x}{x^2-4}}=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}.\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}}=\dfrac{0.\sqrt{2}}{2}=0$. **Chọn C.**

Câu 58. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}$ là:

A. $\dfrac{2}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. **C.** $+\infty$. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Giải nhanh:

$x\to+\infty\longrightarrow x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}\sim x.\sqrt{\dfrac{2x}{3x^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.x.\dfrac{1}{\sqrt{x^2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.x.\dfrac{1}{x}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$ **Chọn B.**

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sqrt{\dfrac{2x+1}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{x^2(2x+1)}{3x^3+x^2+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{2+\dfrac{1}{x}}{3+\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^3}}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}.$

Câu 59. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}x^2\left(\sin\pi x-\dfrac{1}{x^2}\right)$ là:

A. 0. **B.** -1. **C.** π. **D.** $+\infty$.

Lời giải. Ta có $\lim_{x\to 0} x^2\left(\sin \pi x - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\left(x^2 \sin \pi x - 1\right) = -1$. **Chọn B.**

Câu 60. Kết quả của giới hạn $\lim_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}}$ là:

A. 3. **B.** $+\infty$. **C.** 0. **D.** $-\infty$.

Lời giải. Với $x \in (-1;0)$ thì $x+1>0$ và $\frac{x}{x-1}>0$.

Do đó $\lim_{x\to(-1)^+}\left(x^3+1\right)\sqrt{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{x\to(-1)^+}(x+1)\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{(x-1)(x+1)}}$

$= \lim_{x\to(-1)^+}\sqrt{x+1}\left(x^2-x+1\right)\sqrt{\frac{x}{x-1}} = 0$. **Chọn C.**

❍ Bài 03

HÀM SỐ LIÊN TỤC

I – HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa 1

Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên khoảng K và $x_0\in K$.

Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là liên tục tại x_0 nếu $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

II – HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

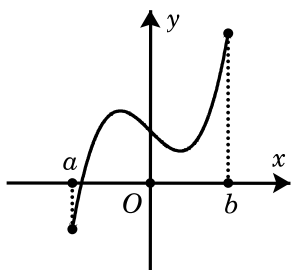
Định nghĩa 2

Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là liên tục trên một khoảng nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

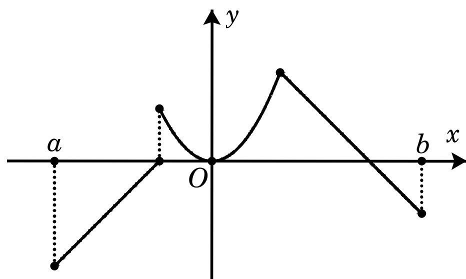
Hàm số $y=f\left(x\right)$ được gọi là liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$ nếu nó liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$ và

$$\lim_{x\to a^+}f\left(x\right)=f\left(a\right),\quad \lim_{x\to b^-}f\left(x\right)=f\left(b\right).$$

Nhận xét: Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó.



Hàm số liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$



Hàm số không liên tục trên khoảng $\left(a;b\right)$

III – MỘT SỐ ĐỊNH LÍ CƠ BẢN

Định lí 1

a) Hàm số đa thức liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.

b) Hàm số phân thức hữu tỉ và hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Định lí 2

Giả sử $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó:

a) Các hàm số $y=f\left(x\right)+g\left(x\right)$, $y=f\left(x\right)-g\left(x\right)$ và $y=f\left(x\right).g\left(x\right)$ liên tục tại x_0;

b) Hàm số $\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$ liên tục tại x_0 nếu $g\left(x_0\right)\neq 0$.

Định lí 3

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c\in(a;b)$ sao cho $f(c)=0$.

Định lí 3 có thể phát biểu theo một dạng khác như sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a).f(b)<0,$ thì phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM



Vấn đề 1. XÉT TÍNH LIÊN TỤC CỦA HÀM SỐ



Câu 1. Hàm số $f(x)=\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ liên tục trên:

A. $[-4;3]$. **B.** $[-4;3)$. **C.** $(-4;3]$. **D.** $[-\infty;-4]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải. Điều kiện: $\begin{cases}3-x\geq 0\\x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\x\leq -3\end{cases}\xrightarrow{TXD} D=(-4;3]\longrightarrow$ hàm số liên tục trên $(-4;3)$. Xét tại $x=3,$ ta có

$$\lim_{x\to 3^-}f(x)=\lim_{x\to 3^-}\left(\sqrt{3-x}+\frac{1}{\sqrt{x+4}}\right)=\frac{1}{\sqrt{7}}=f(3)\longrightarrow \text{Hàm số liên tục trái tại } x=3.$$

Vậy hàm số liên tục trên $(-4;3]$. **Chọn C.**

Câu 2. Hàm số $f(x)=\dfrac{x^3+x\cos x+\sin x}{2\sin x+3}$ liên tục trên:

A. $[-1;1]$. **B.** $[1;5]$. **C.** $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải. Vì $2\sin x+3\neq 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\xrightarrow{TXD} D=\mathbb{R}\longrightarrow$ Hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.

Chọn D.

Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ với $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ với mọi $x\neq 1$. Tính $f(1)$.

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** -1.

Lời giải. Vì $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên suy ra

$$f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-2)=-1.$$ **Chọn D.**

Câu 4. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $[-3;3]$ với $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải. Vì $f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3-x}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$ **Chọn B.**

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $(-4;+\infty)$ với $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ với $x\neq 0$. Tính $f(0)$.

A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải. Vì $f(x)$ liên tục trên $(-4;+\infty)$ nên suy ra

$$f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x+4}+2\right)=4.$$ **Chọn C.**



Vấn đề 2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM



Câu 6. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=3$.

Lời giải. Tập xác định: $D=\mathbb{R}$, chứa $x=2$. Theo giả thiết thì ta phải có

$$m=f(2)=\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3.$$ **Chọn D.**

Câu 7. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3x+m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=4$. **D.** $m=6$.

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Theo giả thiết ta phải có

$$3+m=f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+2\right)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(x^2+2\right)=3\Leftrightarrow m=0.$$

Chọn A.

Câu 8. Tìm giá trị thực của tham số k để hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ k+1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $k=\frac{1}{2}$. **B.** $k=2$. **C.** $k=-\frac{1}{2}$. **D.** $k=0$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ có TXĐ: $D=[0;+\infty)$. Điều kiện bài toán tương đương với

Ta có: $k+1=y(1)=\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow k=-\dfrac{1}{2}$. **Chọn C.**

Câu 9. Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x}{\sqrt{x+1}-2} & \text{khi } x\neq 3\\ m & \text{khi } x=3\end{cases}$ liên tục tại $x=3$ (với m là tham số). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $m\in(-3;0)$. **B.** $m\le -3$. **C.** $m\in[0;5)$. **D.** $m\in[5;+\infty)$.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $(-1;+\infty)$. Theo giả thiết ta phải có

$$m=f(3)=\lim_{x\to 3}f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{3-x}{\sqrt{x+1}-2}=\lim_{x\to 3}\frac{(3-x)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{x-3}=-\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x+1}+2\right)=-4.$$

Chọn B.

Câu 10. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ m & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại $x=0$.

A. $m\in(-2;-1)$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m\in[-1;7)$. **D.** $m\in[7;+\infty)$.

Lời giải. Với mọi $x\neq 0$ ta có

$$0\le |f(x)|=\left|x^2\sin\frac{1}{x}\right|\le x^2\to 0 \text{ khi } x\to 0\longrightarrow \lim_{x\to 0}f(x)=0.$$

Theo giải thiết ta phải có: $m=f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=0$. **Chọn C.**

Câu 11. Biết rằng $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan x}{x} & \text{khi } x\neq 0\\ 0 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $\left(-\infty;\dfrac{\pi}{4}\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải. Tập xác định:

$$D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;\frac{3\pi}{2}+k\pi\right)=\cdots\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{2}\right)\cup\cdots$$

Ta có $\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}.\dfrac{1}{\cos x}=1.\dfrac{1}{\cos 0}=1\neq 0=f(0)\longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$. **Chọn A.**

Câu 12. Biết rằng $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin \pi x}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-\pi$. **B.** $m=\pi$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=1$.

Lời giải. Tập xác định $D=\mathbb{R}$. Điều kiện bài toán tương đương với

$$m=f(1)=\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sin \pi x}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x-\pi+\pi)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-\sin\pi(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left[(-\pi).\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}\right]\ (*).$$

Đặt $t=\pi(x-1)$ thì $t\to 0$ khi $x\to 1$. Do đó (*) trở thành:

$$m=\lim_{t\to 0}(-\pi).\frac{\sin t}{t}=-\pi.$$ **Chọn A.**

Câu 13. Biết rằng $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2} & \text{khi } x\neq \pi\\ m & \text{khi } x=\pi\end{cases}$ liên tục tại $x=\pi$.

A. $m=\frac{\pi}{2}$. **B.** $m=-\frac{\pi}{2}$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điều kiện củz bài toán trở thành:

$$m=f(\pi)=\lim_{x\to\pi}f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}}{(x-\pi)^2}=\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)}\right]^2 \quad (*)$$

Đặt $t=\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\to 0$ khi $x\to 1$. Khi đó (*) trở thành: $m=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}.1^2=\frac{1}{2}$.

Chọn C.

Câu 14. Hàm số $f(x)=\begin{cases}3 & \text{khi } x=-1\\ \frac{x^4+x}{x^2+x} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 0\\ 1 & \text{khi } x=0\end{cases}$ liên tục tại:

A. mọi điểm trừ $x=0,\ x=1$. **B.** mọi điểm $x\in\mathbb{R}$.

C. mọi điểm trừ $x=-1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1),(-1;0)$ và $(0;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x^2-x+1)=3=f(-1).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=0$, ta có

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+x}{x^2+x}=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+1)(x^2-x+1)}{x(x+1)}=\lim_{x\to 0}(x^2-x+1)=1=f(0).$$

$\longrightarrow$ hàm số $y=f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Chọn B.

Câu 15. Số điểm gián đoạn của hàm số $f(x)=\begin{cases}0,5 & \text{khi } x=-1\\ \frac{x(x+1)}{x^2-1} & \text{khi } x\neq -1,\ x\neq 1\\ 1 & \text{khi } x=1\end{cases}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Hàm số $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$ và $(1;+\infty)$.

(i) Xét tại $x=-1$, ta có $\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{1}{2}=f(-1)\longrightarrow$ Hàm số liên tục tại $x=-1$.

(ii) Xét tại $x=1$, ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x}{x-1}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x}{x-1}=-\infty\end{cases}\longrightarrow$ Hàm số $y=f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**



Vấn đề 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG



Câu 16. Có bao nhiêu giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}m^2x^2 & \text{khi } x\le 2\\ (1-m)x & \text{khi } x>2\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$?

A. 2. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;2)$; $(2;+\infty)$.

Khi đó $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2).\qquad (*)$

Ta có $\begin{cases}f(2)=4m^2\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left[(1-m)x\right]=2(1-m)\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} m^2x^2=4m^2\end{cases}\longrightarrow (*)\Leftrightarrow 4m^2=2(1-m)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-1\\ m=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Chọn A.

Câu 17. Biết rằng hàm số $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & \text{khi } x\in[0;4]\\ 1+m & \text{khi } x\in(4;6]\end{cases}$ tục trên $[0;6]$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $m<2$. **B.** $2\le m<3$. **C.** $3<m<5$. **D.** $m\ge 5$.

Lời giải. Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0;4)$ và $(4;6)$. Khi đó hàm số liên tục trên đoạn $[0;6]$ khi và chỉ khi hàm số liên tục tại $x=4$, $x=0$, $x=6$.

Tức là ta cần có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=f(6)\\ \lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=f(4)\end{cases}$. $(*)$

• $\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0\\ f(0)=\sqrt{0}=0\end{cases}$;

- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-}(1+m) = 1+m \\ f(6) = 1+m \end{cases}$;
- $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\sqrt{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}(1+m) = 1+m; \\ f(4) = 1+m \end{cases}$

Khi đó $(*)$ trở thành $1+m=2 \Leftrightarrow m=1<2.$ **Chọn A.**

Câu 18. Có bao nhiêu giá trị của tham số a để hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{|x-1|} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải. Hàm số $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi nó liê tục tại $x=1$, tức là ta cần có

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) \Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1). \quad (*)$$

Ta có $f(x) = \begin{cases} x-2 & \text{khi } x>1 \\ a & \text{khi } x=1 \\ 2-x & \text{khi } x<1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}(2-x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}(x-2) = -1 \end{cases} \longrightarrow (*)$ không tỏa mãn với mọi $a\in\mathbb{R}$. Vậy không tồn tại giá trị a thỏa yêu cầu. **Chọn C.**

Câu 19. Biết rằng $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ a & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ liên tục trên đoạn $[0;1]$ (với a là tham số). Khẳng định nào dưới đây về giá trị a là đúng?

A. a là một số nguyên. **B.** a là một số vô tỉ.

C. $a>5$. **D.** $a<0$.

Lời giải. Hàm số xác định và liên tục trên $[0;1)$. Khi đó $f(x)$ liên tục trên $[0;1]$ khi và chỉ khi $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1). \quad (*)$

Ta có $\begin{cases} f(1) = a \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1^-}\left[(x+1)(\sqrt{x}+1)\right] = 4 \end{cases} \longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=4.$ **Chọn A.**

Câu 20. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1} & \text{khi } x<1 \\ -2x & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **B.** $f(x)$ không liên tục trên $(0;2)$.

C. $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **D.** $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Lời giải. Dễ thấy hàm số liên tục trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(-2x)=-2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x}-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left[-\left(\sqrt{2-x}+1\right)\right]=-2 \end{cases}$ $\longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn D.**

Câu 21. Tìm giá trị nhỏ nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x} & \text{khi } x>3 \\ 1-a^2x & \text{khi } x\le 3 \end{cases}$ liên tục tại $x=3$.

A. $-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **B.** $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** $-\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{4}{3}$.

Lời giải. Điều kiện bài toán trở thành: $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=f(3)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(3)=1-3a^2 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{x^2-5x+6}{\sqrt{4x-3}-x}=\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{4x-3}+x\right)}{1-x}=-3 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\left(1-a^2x\right)=1-3a^3. \end{cases}$

$\longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow a_{\min}=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **Chọn A.**

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất của a để hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x>2 \\ a^2x+\dfrac{1}{4} & \text{khi } x\le 2 \end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. $a_{\max}=3$. **B.** $a_{\max}=0$. **C.** $a_{\max}=1$. **D.** $a_{\max}=2$.

Lời giải. Ta cần có $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=f(2)$. $(*)$

Ta có $\begin{cases} f(2)=2a^2-\dfrac{7}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt[3]{3x+2}-2}{x-2}=\dfrac{1}{4} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(a^2x+\dfrac{1}{4}\right)=2a^2-\dfrac{7}{4} \end{cases}$ $\longrightarrow (*) \Leftrightarrow a=\pm 1 \longrightarrow a_{\max}=1$. **Chọn C.**

Câu 23. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} 1-\cos x & \text{khi } x\le 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x>0 \end{cases}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $f(x)$ liên tục tại $x=0$. **B.** $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;1)$.

C. $f(x)$ không liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$.

Mặt khác $\begin{cases} f(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(1-\cos x)=1-\cos 0=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{0+1}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=0$.

Chọn C.

Câu 24. Tìm các khoảng liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{khi } |x|\le 1 \\ x-1 & \text{khi } |x|>1 \end{cases}$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x=-1$.

B. Hàm số liên tục trên các khoảng $(-\infty,-1)$; $(1;+\infty)$.

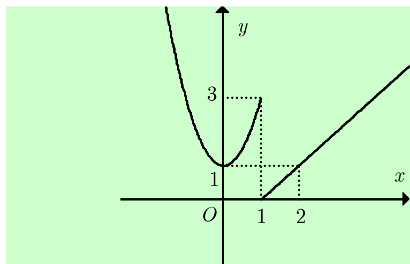
C. Hàm số liên tục tại $x=1$.

D. Hàm số liên tục trên khoảng $(-1,1)$.

Lời giải. Ta có $f(x)$ liên tục trên $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

- Ta có $\begin{cases} f(-1)=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim\limits_{x\to(-1)^-}(x-1)=-2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=-1$. **Chọn A.**
- Ta có $\begin{cases} f(1)=\cos\dfrac{\pi}{2}=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\cos\dfrac{\pi x}{2}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Câu 25. Hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình bên không liên tục tại điểm có hoành độ là bao nhiêu?



A. $x=0$.

B. $x=1$.

C. $x=2$.

D. $x=3$.

Lời giải. Dễ thấy tại điểm có hoành độ $x=1$ đồ thị của hàm số bị "đứt" nên hàm số không liên tục tại đó.

Cụ thể: $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=0\ne 3=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ nên $f(x)$ gián đoạn tại $x=1$. **Chọn B.**

Câu 26. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2}{x} & \text{khi } x<1,\ x\ne 0 \\ 0 & \text{khi } x=0 \\ \sqrt{x} & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.

B. mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$.

D. mọi điểm trừ $x=0$ và $x=1$.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0)$, $(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 1^-} x=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=1$.

Vậy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **Chọn A.**

Câu 27. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{khi } x<3,\ x\neq 1 \\ 4 & \text{khi } x=1 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } x\geq 3 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $\mathbb{R}$.
B. mọi điểm trừ $x=1$.
C. mọi điểm trừ $x=3$.
D. mọi điểm trừ $x=1$ và $x=3$.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;1),(1;3)$ và $(3;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=4 \\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=1$.

Ta có $\begin{cases} f(3)=2 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 3^-}(x+1)=4 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ gián đoạn tại $x=3$.

Chọn D.

Câu 28. Số điểm gián đoạn của hàm số $h(x)=\begin{cases} 2x & \text{khi } x<0 \\ x^2+1 & \text{khi } 0\leq x\leq 2 \\ 3x-1 & \text{khi } x>2 \end{cases}$ là:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải. Hàm số $y=h(x)$ có TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

Dễ thấy hàm số $y=h(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;2)$ và $(2;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} h(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} h(2)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(x^2+1\right)=5 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} h(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(3x-1)=5 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Chọn A.

Câu 29. Tính tổng S gồm tất cả các giá trị m để hàm số $f(x)=\begin{cases} x^2+x & \text{khi } x<1 \\ 2 & \text{khi } x=1 \\ m^2x+1 & \text{khi } x>1 \end{cases}$ liên tục tại $x=1$.

A. $S=-1.$ **B.** $S=0.$ **C.** $S=1.$ **D.** $S=2.$

Lời giải. Hàm số xác định với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Điều kiện bài toán trở thành $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(1).$ (*)

Ta có $\begin{cases} f(1)=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(m^2x+1\right)=m^2+1 \xrightarrow{(*)} m^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(x^2+x\right)=2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m=\pm 1 \longrightarrow S=0.$ **Chọn B.**

Câu 30. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} -x\cos x & \text{khi } x<0 \\ \dfrac{x^2}{1+x} & \text{khi } 0\le x<1 \\ x^3 & \text{khi } x\ge 1 \end{cases}$. Hàm số $f(x)$ liên tục tại:

A. mọi điểm thuộc $x\in\mathbb{R}$. **B.** mọi điểm trừ $x=0$.

C. mọi điểm trừ $x=1$. **D.** mọi điểm trừ $x=0$; $x=1$.

Lời giải. Hàm số $y=f(x)$ có TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Dễ thấy $f(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(-\infty;0),(0;1)$ và $(1;+\infty)$.

Ta có $\begin{cases} f(0)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x\cos x)=0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2}{1+x}=0 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ liên tục tại $x=0$.

Ta có $\begin{cases} f(1)=1 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2}{1+x}=\dfrac{1}{2} \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^3=1 \end{cases} \longrightarrow f(x)$ không liên tục tại $x=1$.

Chọn C.



Vấn đề 5. SỐ NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRÊN MỘT KHOẢNG



Câu 31. Cho hàm số $f(x)=-4x^3+4x-1$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Hàm số đã cho liên tục trên $\mathbb{R}$.

B. Phương trình $f(x)=0$ không có nghiệm trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trên khoảng $(-2;0)$.

D. Phương trình $f(x)=0$ có ít nhất hai nghiệm trên khoảng $\left(-3;\frac{1}{2}\right)$.

Lời giải. (i) Hàm $f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R} \longrightarrow$ A đúng.

(ii) Ta có $\begin{cases} f(-1)=-1<0 \\ f(-2)=23>0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_1 trên $(-2;1)$, mà

$$(-2;-1)\subset(-2;0)\subset(-\infty;1) \longrightarrow \text{ B sai và C đúng } \longrightarrow \textbf{ Chọn B.}$$

(iii) Ta có $\begin{cases} f(0)=-1<0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0 \end{cases} \longrightarrow f(x)=0$ có nghiệm x_2 thuộc $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Kết hợp với (1) suy ra $f(x)=0$ có các nghiệm x_1, x_2 thỏa: $-3<x_1<-1<0<x_2<\frac{1}{2} \longrightarrow$ D đúng.

Câu 32. Cho phương trình $2x^4-5x^2+x+1=0$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-1;1)$.

B. Phương trình không có nghiệm trong khoảng $(-2;0)$.

C. Phương trình chỉ có một nghiệm trong khoảng $(-2;1)$.

D. Phương trình có ít nhất hai nghiệm trong khoảng $(0;2)$.

Lời giải. Hàm số $f(x)=2x^4-5x^2+x+1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Ta có

(i) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(-1)=-3 \end{cases} \Rightarrow f(-1).f(0)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_1 thuộc $(-1;0)$.

(ii) $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(1)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(0).f(1)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_2 thuộc $(0;1)$.

(iii) $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f(2)=15 \end{cases} \Rightarrow f(1).f(2)<0 \longrightarrow f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm x_3 thuộc $(1;2)$.

Vậy phương trình $f(x)=0$ đã cho có các nghiệm x_1, x_2, x_3 thỏa

$$-1<x_1<0<x_2<1<x_3<2 \longrightarrow \textbf{ Chọn D.}$$

Câu 33. Cho hàm số $f(x)=x^3-3x-1$. Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ trên $\mathbb{R}$ là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải. Hàm số $f(x)=x^3-3x-1$ là hàm đa thức có tập xác định là $\mathbb{R}$ nên liên tục trên $\mathbb{R}$. Do đó hàm số liên tục trên mỗi khoảng $(-2;-1)$, $(-1;0)$, $(0;2)$.

Ta có

- $\begin{cases} f(-2)=-3 \\ f(-1)=1 \end{cases} \Rightarrow f(-2)f(-1)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-2;-1)$.

- $\begin{cases} f(-1)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(-1)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(-1;0)$.
- $\begin{cases} f(2)=1 \\ f(0)=-1 \end{cases} \Rightarrow f(2)f(0)<0 \longrightarrow (1)$ có ít nhất một nghiệm thuộc $(0;2)$.

Như vậy phương trình (1) có ít nhất ba thuộc khoảng $(-2;2)$. Tuy nhiên phương trình $f(x)=0$ là phương trình bậc ba có nhiều nhất ba nghiệm. Vậy phương trình $f(x)=0$ có đúng nghiệm trên $\mathbb{R}$. Chọn D.

Cách CASIO. (i) Chọn MODE 7 (chức năng TABLE) và nhập: $F(X)=X^3-3X-1$.

(ii) Ấn "=" và tiếp tục nhập: **Start** $\leftrightarrow -5$ (có thể chọn số nhỏ hơn).

End $\leftrightarrow 5$ (có thể chọn số lớn hơn).

Step $\leftrightarrow 1$ (có thể nhỏ hơn, ví dụ $\frac{1}{2}$).

(iii) Ấn "=" ta được bảng sau:

Bên cột X ta cần chọn hai giá trị a và b $(a<b)$ sao cho tương ứng bên cột $F(X)$ nhận các giá trị trái dấu, khi đó phương trình có nghiệm $(a;b)$. Có bao nhiêu cặp số a, b như thế sao cho khác khoảng $(a;b)$ rời nhau thì phương trình $f(x)=0$ có bấy nhiêu nghiệm.

Câu 34. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;4]$ sao cho $f(-1)=2$, $f(4)=7$. Có thể nói gì về số nghiệm của phương trình $f(x)=5$ trên đoạn $[-1;4]$:

A. Vô nghiệm. **B.** Có ít nhất một nghiệm.

C. Có đúng một nghiệm. **D.** Có đúng hai nghiệm.

Lời giải. Ta có $f(x)=5 \Leftrightarrow f(x)-5=0$. Đặt $g(x)=f(x)-5$. Khi đó

$$\begin{cases} g(-1)=f(-1)-5=2-5=-3 \\ g(4)=f(4)-5=7-5=2 \end{cases} \Rightarrow g(-1)g(4)<0.$$

Vậy phương trình $g(x)=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$ hay phương trình $f(x)=5$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(1;4)$. **Chọn B.**

Câu 35. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-10;10)$ để phương trình $x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3=0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1<-1<x_2<x_3$?

A. 19. **B.** 18. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải. Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+(2m-2)x+m-3$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

- Giả sử phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 sao cho $x_1<-1<x_2<x_3$.

Khi đó $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

Ta có $f(-1)=(-1-x_1)(-1-x_2)(-1-x_3)>0$ (do $x_1<-1<x_2<x_3$).

Mà $f(-1)=-m-5$ nên suy ra $-m-5>0 \Leftrightarrow m<-5$.

● Thử lại: Với $m<-5$, ta có

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)=-\infty$ nên tồn tại $a<-1$ sao cho $f(a)<0$. (1)
- Do $m<-5$ nên $f(-1)=-m-5>0$. (2)
- $f(0)=m-3<0$. (3)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=+\infty$ nên tồn tại $b>0$ sao cho $f(b)>0$. (4)

Từ (1) và (2), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-\infty;-1)$; Từ (2) và (3), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$; Từ (3) và (4), suy ra phương trình có nghiệm thuộc khoảng $(0;+\infty)$.

Vậy khi $m<-5$ thỏa mãn $\xrightarrow[m\in(-10;10)]{m\in\mathbb{Z}} m\in\{-9;-8;-7;-6\}$. **Chọn C.**